La Tabla Periódica Musical (2/2)

Luis Nuño

Departamento de Comunicaciones, Universidad Politécnica de Valencia
lnuno@dcom.upv.es, ruedaarmonica@gmail.com, harmonicwheel@gmail.com

Este artículo ha sido publicado en
DIVULGAMAT, Centro virtual de divulgación de las matemáticas
RSME: Real Sociedad Matemática Española
Enero 2021
http://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=18516:112-enero-2021-la-tabla-periodica-musical-22&catid=67:ma-y-matemcas&directory=67

1. Introducción

En la primera parte de este trabajo hemos visto la forma interválica y el vector de clases de intervalos o ICV, que indica el contenido de un conjunto de notas en cuanto a intervalos, es decir, clases de cardinalidad c = 2. En esta segunda parte introduciremos unas versiones avanzadas del mismo, que son el "Vector de Tipos de Tricordos" y el "Vector de Clases de Tricordos", los cuales indican el contenido de un conjunto de notas en cuanto a tricordos, es decir, tipos y clases de cardinalidad c = 3. Estos tres vectores han sido claves para elaborar la Tabla Periódica vista anteriormente, cuyo estudio completaremos ahora con la información relativa a los *tipos* de conjuntos y a los pares de clases Z-relacionadas.

Por último, veremos también las formas primas de Forte y de Rahn, ampliamente utilizadas para representar las *clases* de conjuntos y que pueden obtenerse muy fácilmente a partir de la forma interválica introducida aquí, lo que constituye otra de sus interesantes propiedades.

2. Vector de Tipos de Tricordos: TTV

Para c = 3 hay 12 *clases* de conjuntos, los tricordos, cuyas formas interválicas *primas*, ordenadas por ICV decreciente, pueden verse en la Tabla Periódica (Tabla 1). Todas ellas tienen s = 1 salvo la 3-12, la tríada aumentada, que tiene s = 3. Cinco de ellas son inversionalmente simétricas, concretamente 3-1, 3-6, 3-9, 3-10 y 3-12. Y cada una de las otras 7 está formada por dos *tipos* de conjuntos, relacionados entre sí por inversión.

Tabla 1. Tabla Periódica de las Clases de Conjuntos.

PERIODIC TABLE OF SET CLASSES																		
0-	1^{12} –		**1-**	1 0		**2-**	1 1B	2 2A	3 39	4 48	5 57	6^{2} 66						
3-	1 1^{2}A	2 129	3 138	4 147	5 156	6 228	7 237	8 246	9 255	10 336	11 345	12^{3} 444						
4-	1 $1^{3}9$	2 $1^{2}28$	3 1218	4 $1^{2}37$	5 $1^{2}46$	6 $1^{2}55$	7 1317	8 1416	9^{2} 1515	10 1272	11 1227	12^{+} 1263	13 1236	14^{+} 1254	29 1245			
	16 1425	17 1353	18 1335	19 1344	20 1434	21 2226	22 2235	23 2325	24 2244	25^{2} 2424	26 2343	27 2334	28^{4} 3333		15 1326			
5-	1 $1^{4}8$	2 $1^{3}27$	3 $1^{2}217$	4 $1^{3}36$	5 $1^{3}45$	6 $1^{2}316$	7 $1^{2}415$	8 $1^{2}262$	9 $1^{2}226$	10 12126	11^{+} $1^{2}253$	36 $1^{2}235$ 12 12216	13 $1^{2}244$	14 $1^{2}325$	15 $1^{2}424$	16 12135	37 $1^{2}343$ 17 12144	38 $1^{2}334$ 18 12513
	19 12315	20 12414	21 13134	22 13314	23 12252	24 12225	25 12342	26^{+} 12243	27 12234	28^{+} 12423	29 12324	30 13224	31 12333	32 13233	33 22224	34 22233	35 22323	
6-	1 $1^{5}7$	2 $1^{4}26$	36 $1^{4}35$ 3 $1^{3}216$	37 $1^{4}44$ 4 $1^{2}21^{2}6$	5 $1^{3}315$	38 $1^{3}414$ 6 $1^{2}31^{2}5$	7^{2} $1^{2}41^{2}4$	8 $1^{3}252$	9 $1^{3}225$	39^{+} $1^{3}243$ 10* $1^{2}2152$	40 $1^{3}234$ 11 $1^{2}2125$	41 $1^{3}324$ 12 $1^{2}2215$	42 $1^{3}333$ 13 121215	$14^{=+}$ $1^{2}2143$	15 $1^{2}2134$	16 $1^{2}2413$	43 $1^{2}3124$ 17 $1^{2}2314$	18^{*+} $1^{2}3214$
	44 $1^{2}3133$ 19 121314	20^{3} 131313	21 $1^{2}2242$	22 $1^{2}2224$	45 $1^{2}2332$ 23 121242	46 $1^{2}2233$ 24 121224	47 $1^{2}2323$ 25 122124	48 $1^{2}3223$ 26 122214	27 121233	49 121323 28 122133	29 123213 50 123132	30^{2} 123123	31 122313	32 122322	33 122232	34 122223	35^{6} 222222	
7-	1 $1^{6}6$	2 $1^{5}25$	3 $1^{5}34$	4 $1^{4}215$	5 $1^{3}21^{2}5$	6 $1^{4}314$	7 $1^{3}31^{2}4$	8 $1^{4}242$	9 $1^{4}224$	10 $1^{4}233$	11* $1^{3}2142$	12 $1^{4}323$ 36 $1^{3}2124$	13 $1^{2}21^{2}24$	14 $1^{3}2214$	15 $1^{2}221^{2}4$	16 $1^{3}2133$	17 $1^{2}21^{2}33$ 37 $1^{2}21412$	18 $1^{3}2313$ 38 $1^{2}21214$
	19 $1^{3}3123$	20 $1^{2}231^{2}3$	21 $1^{2}21313$	22 $1^{2}31213$	23 $1^{3}2232$	24 $1^{3}2223$	25 $1^{2}21232$	26* $1^{2}21322$	27 $1^{2}21223$	28* $1^{2}22132$	29 $1^{2}22123$	30 $1^{2}22213$	31 1212123	32 1212213	33 $1^{2}22222$	34 1212222	35 1221222	
8-	1 $1^{7}5$	2 $1^{6}24$	3 $1^{6}33$	4 $1^{5}214$	5 $1^{4}21^{2}4$	6 $1^{3}21^{3}4$	7 $1^{5}313$	8 $1^{4}31^{2}3$	9^{2} $1^{3}31^{3}3$	10 $1^{5}232$	11 $1^{5}223$	12* $1^{4}2132$	13 $1^{4}2123$	14* $1^{3}21^{2}32$	15 $1^{4}2213$			
	16 $1^{3}221^{2}3$	17 $1^{3}21312$	18 $1^{3}21213$	19 $1^{2}21^{2}213$	20 $1^{2}2121^{2}3$	21 $1^{4}2222$	22 $1^{3}21222$	23 $1^{3}22122$	24 $1^{2}21^{2}222$	25^{2} $1^{2}221^{2}22$	26 $1^{2}212212$	27 $1^{2}212122$	28^{4} 12121212		29 $1^{3}21^{2}23$			
9-	1 $1^{8}4$	2 $1^{7}23$	3 $1^{6}213$	4 $1^{5}21^{2}3$	5 $1^{4}21^{3}3$	6 $1^{6}222$	7 $1^{5}2122$	8 $1^{4}21^{2}22$	9 $1^{3}21^{3}22$	10 $1^{4}21212$	11 $1^{3}21^{2}212$	12^{3} $1^{2}21^{2}21^{2}2$						
12-	1^{12} 1^{12}		**11-**	1 $1^{10}2$		**10-**	1 $1^{9}3$	2 $1^{8}22$	3 $1^{7}212$	4 $1^{6}21^{2}2$	5 $1^{5}21^{3}2$	6^{2} $1^{4}21^{4}2$						

Luis Nuño, 2020
www.harmonicwheel.com
www.ruedaarmonica.com

Los dos tipos que forman una clase tienen el mismo ICV, pero una sonoridad diferente, así como una forma interválica también diferente. Un claro ejemplo es la clase 3-11, formada por las tríadas mayor y menor, cuyas formas interválicas *normales* son, respectivamente, {354} y {345}. En estos casos, al tipo de conjunto que tenga la menor de ellas le llamaremos “tipo a” y al otro “tipo b”. Por tanto, la tríada menor será de tipo a y la tríada mayor de tipo b (ya que 345 es menor que 354). En total, para *c* = 3 tenemos 5 + 2x7 = 19 tipos de tricordos.

Para los conjuntos de más de 3 notas podemos determinar cuántos tricordos de cada *tipo* se pueden formar con sus notas. El resultado son 19 números que forman el “Vector de Tipos de Tricordos” o TTV. Por claridad, este vector lo escribiremos como dos grupos de 9 y 10 números separados por un guion, el primero de los cuales corresponde a los tricordos 3-1, 3-2a, 3-2b, 3-3a, 3-3b, 3-4a, 3-4b, 3-5a y 3-5b (los cuales contienen al menos un semitono) y el segundo a 3-6, 3-7a, 3-7b, 3-8a, 3-8b, 3-9, 3-10, 3-11a, 3-11b y 3-12 (los cuales no contienen ningún semitono). Por ejemplo, el TTV de la clase 4-28 (acorde de séptima disminuida) es (000000000-0000004000), ya que solo contiene 4 tricordos del tipo 3-10, que es la tríada disminuida. El TTV de la clase 5-35 (escala pentatónica) es (000000000-1220030110), donde el primer grupo de números son todos ceros porque esta clase no contiene semitonos, y el TTV de la clase 7-35 (escala mayor) es (022002211-3441151330), donde los últimos cuatro elementos indican que hay 1 tríada disminuida, 3 menores, 3 mayores y ninguna aumentada.

Se ha comprobado que solo hay dos tipos de conjuntos con el mismo TTV, que son los pertenecientes a la clase 6-14, el cual es (111222200-1110010221). Todos los demás tipos tienen TTV diferentes, por lo que este vector caracteriza completamente su sonoridad.

En las clases de conjuntos de más de 3 notas que tienen dos tipos, la asignación de los tipos a y b ya no se hace según su forma interválica normal, sino que se asigna el tipo a al que tenga mayor TTV, siendo el otro de tipo b. De esta forma, se demuestra que el complementario de un tipo a es siempre un tipo b y viceversa [1]. La única excepción son los dos tipos de la clase 6-14, ya que tienen el mismo TTV, lo cual se indica en la Tabla Periódica mediante un superíndice con el símbolo “=”. Además, ambos son autocomplementarios, es decir, cada uno es el complementario de sí mismo. Entonces, en este caso, sí asignamos el tipo a al de menor forma interválica normal, es decir, al que tiene la forma interválica prima. Con estos criterios la mayoría de las formas interválicas primas resultan ser de tipo a. Hay, sin embargo, excepciones, en donde la forma interválica prima es de tipo b, que son 6-10, 6-18, 7-11, 7-26, 7-28, 8-12 y 8-14, todas las cuales ocurren para *c* ≥ 6 y se indican en la Tabla Periódica mediante un asterisco (*).

Por otra parte, los TTV de los tipos a y b de una misma clase de conjunto están relacionados entre sí de una forma muy sencilla, de manera que podemos obtener el TTV de uno de ellos a partir del del otro. Para ello solo hay que intercambiar los elementos que corresponden a dos tipos de la misma clase de tricordo, tal como se muestra en la Figura 2. Por ejemplo, para la clase {12414}, considerada en la Sección 2 del artículo anterior, si conocemos el TTV de su tipo a, que es (010001211-0001010110), podemos obtener el del tipo b, que es (001002111-0000110110).

$$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5 \quad t_6 \quad t_7 \quad t_8 \quad t_9 \quad - \quad t_{10} \quad t_{11} \quad t_{12} \quad t_{13} \quad t_{14} \quad t_{15} \quad t_{16} \quad t_{17} \quad t_{18} \quad t_{19}$$

Figura 2. Relación ente los TTV de los tipos a y b de una misma clase de conjunto.

3. Vector de Clases de Tricordos: TCV

De forma alternativa al TTV podemos definir también un "Vector de Clases de Tricordos" o TCV, que indique cuántos tricordos de cada *clase* contiene un conjunto dado de más de 3 notas. Este vector constará de 12 elementos, los cuales se pueden obtener fácilmente del TTV, simplemente sumando los elementos que corresponden a dos tipos de la misma clase de tricordo. Esta operación se muestra en la Figura 3, donde t_1 … t_{19} son los elementos del TTV (cualquiera de los dos tipos, a o b) y f_1 … f_{12} los elementos del TCV. Así, por ejemplo, el TCV de la clase 4-28 (acorde de séptima disminuida) es (00000-0000400), el de la clase 5-35 (escala pentatónica) es (00000-1403020), el de la clase 7-35 (escala mayor) es (04042-3825160) y el de la clase {12414} es (01032-0011020).

$$\underset{f_1}{\overset{t_1}{\downarrow}} \quad \underbrace{t_2 + t_3}_{f_2} \quad \underbrace{t_4 + t_5}_{f_3} \quad \underbrace{t_6 + t_7}_{f_4} \quad \underbrace{t_8 + t_9}_{f_5} \quad - \quad \underset{f_6}{\overset{t_{10}}{\downarrow}} \quad \underbrace{t_{11} + t_{12}}_{f_7} \quad \underbrace{t_{13} + t_{14}}_{f_8} \quad \underset{f_9}{\overset{t_{15}}{\downarrow}} \quad \underset{f_{10}}{\overset{t_{16}}{\downarrow}} \quad \underbrace{t_{17} + t_{18}}_{f_{11}} \quad \underset{f_{12}}{\overset{t_{19}}{\downarrow}}$$

Figura 3. Relación entre la TTV y la TCV de una misma clase de conjunto.

Se puede comprobar que cada clase de conjunto tiene un TCV diferente, por lo que este vector caracteriza completamente su sonoridad. Esto no ocurre con el ICV ya que, como hemos visto, hay pares de clases con el mismo ICV o Z-relacionadas. En estos casos, la que tiene mayor TCV diremos que es "dura", ya que siempre tiene los intervalos menores más juntos, y la otra "blanda". Además, se demuestra que la complementaria de una clase dura siempre es blanda y viceversa [1]. En el caso particular de los hexacordos (c = 6) esto implica que, si dos clases están Z-relacionadas, cada una es la complementaria de la otra. En la Tabla Periódica los pares de clases Z-relacionadas, como ya se ha indicado, están en la misma celda, ya que tienen el mismo ICV. Entonces, para identificarlas, la dura se ha colocado en la parte superior.

Como ejemplo, consideremos las clases 5-Z12 y 5-Z36, cuyo ICV común es (222121). Sus TCV son, respectivamente, (02022-1200100) y (11102-1101110), por lo que la primera es blanda (parte inferior de la celda) y la segunda dura (parte superior de la celda). Sus formas interválicas primas son, respectivamente, {12216} y {11235}, donde podemos comprobar que la segunda tiene, efectivamente, los intervalos menores más juntos (dos "1" seguidos frente a dos "1" separados cuatro semitonos). Sus clases complementarias son, respectivamente, 7-Z12 (dura) y 7-Z36 (blanda), pudiéndose comprobar que la primera tiene los intervalos menores más juntos. Además, la clase 5-Z36 está formada por dos tipos, 5-Z36a y 5-Z36b, por los que sus complementarios son, respectivamente, 7-Z36b y 7-Z36a.

4. Clases con el Mismo Número de Semitonos

Una última característica de la Tabla Periódica es que, en cada período, las clases que tienen el mismo número de semitonos (número de “1” en la forma interválica o el primer elemento del ICV) se han representado con un mismo color de fondo. Y este color se ha asignado también a sus clases complementarias. De esta manera, dada una forma interválica *prima* es más fácil localizarla en la tabla. Por ejemplo, la forma interválica prima {12414}, considerada en la Sección 2 del artículo anterior, tiene 5 notas y 2 semitonos, por lo que está en el período 5, en las celdas de color azul, y es la clase 5-20. Conviene señalar que este grupo de celdas es uno de los más numerosos, por lo que en otros casos esta búsqueda resulta mucho más sencilla.

En la Tabla 2 se muestra, para cada período, el número de clases de conjuntos que tienen el mismo número de semitonos, es decir, el mismo color de fondo en la Tabla 1 (se ha seguido una disposición similar en ambas tablas). Así mismo, para cada período se muestra el número total de clases, tipos y conjuntos de notas. Dado que también se ha incluido la clase 0-1 (silencio), el número total de conjuntos de notas es, lógicamente, 2^{12} = 4096, que pueden agruparse en 352 tipos o 224 clases. Nótense las simetrías que hay entre los períodos complementarios.

Tabla 2. Número de Clases, Tipos y Conjuntos de Notas.

Período	**Clases de conjuntos con el mismo número de Semitonos**													**Clases**	**Tipos**	**Conj. Notas**
	12	**11**	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**			
0-													1	1	1	1
1-													1	1	1	12
2-												1	5	6	6	66
3-											1	4	7	12	19	220
4-										1	8	12	8	29	43	495
5-									1	6	18	10	3	38	66	792
6-								1	9	19	17	3	1	50	80	924
7-							1	6	18	10	3			38	66	792
8-						1	8	12	8					29	43	495
9-					1	4	7							12	19	220
10-				1	5									6	6	66
11-			1											1	1	12
12-	1													1	1	1
Total	1	0	1	1	6	5	16	19	36	36	47	30	26	224	352	4096

5. Formas Primas de Forte y de Rahn

Como hemos visto en la primera parte de este trabajo la forma interválica que hemos introducido aquí es realmente útil para representar los *tipos* de conjuntos, dadas sus importantes propiedades. Sin embargo, en los listados proporcionados por Forte [2] y Rahn [3] solo se incluyen las *clases* de conjuntos y se representan mediante sus propias "formas primas", que en la mayoría de los casos son iguales, pero no siempre. Lo mismo ocurre en los listados de Straus [4], quien utiliza las formas primas de Rahn.

Por otra parte, estas formas primas no están basadas en intervalos, sino en notas y empiezan siempre por el Do. Por ejemplo, la forma prima, tanto de Forte como de Rahn, de la clase 3-11 (tríadas mayores y menores) es [037], es decir, las notas Do, Mib, Sol, que corresponden al acorde de Do menor. Y la forma prima de la clase 3-12 (tríada aumentada) es [048] (Do, Mi, Sol#). En otros casos, sin embargo, la forma prima no es tan fácil de reconocer. Por ejemplo, la forma prima, tanto de Forte como de Rahn, de la clase 7-35 (escala mayor) es [013568A], que corresponde a la escala de Reb mayor. Esto es consecuencia de los procedimientos utilizados por Forte y Rahn para obtener sus formas primas, que por cierto son bastante laboriosos. Sin embargo, ambas pueden obtenerse fácilmente a partir de la forma interválica vista aquí. A continuación, veremos cómo y lo ilustraremos con el conjunto de notas [59A24], visto en la Sección 2 del artículo anterior, cuya forma interválica es {41421}.

- Forma Normal de Rahn: tomamos la permutación circular que corresponda al número mayor, pero visto de derecha a izquierda (es decir, en "orden colexicográfico"), que es {21414}. Y ahora, empezando por "0", escribimos las demás notas separadas por los intervalos indicados en esa forma interválica (salvo el último), es decir, [02378].

- Forma Normal de Forte: tomamos la permutación circular que tenga el mayor intervalo a la derecha y, si hay varias opciones (como ocurre aquí, ya que hay dos "4"), la que corresponda al número menor (visto de izquierda a derecha), que es {14214}. Y ahora, empezando por "0", escribimos las demás notas separadas por los intervalos indicados en esa forma interválica (salvo el último), es decir, [01578]. Aunque en este caso las formas normales de Forte y de Rahn son distintas, en la mayoría de los casos son iguales.

- Forma Prima de Rahn: hay que hallar las formas normales del conjunto dado y de su inverso, y tomar la menor de ellas. La forma interválica del conjunto inverso es {12414}, que es también su forma interválica prima. Su permutación circular que corresponde al número mayor visto de derecha a izquierda es {14124}, que da lugar al conjunto de notas empezando por "0": [01568]. Esta es también la forma prima de Rahn, ya que es menor que [02378].

- Forma Prima de Forte: también hay que hallar las formas normales del conjunto dado y de su inverso, y tomar la menor de ellas. Para el conjunto inverso, la forma interválica que tiene el mayor intervalo a la derecha y corresponde al número menor es precisamente {12414}, que da lugar al conjunto de notas empezando por "0": [01378]. Esta es también la forma prima de Forte, ya que es menor que [01578]. De nuevo, en este caso las formas normales de Forte y de Rahn para el conjunto inverso son distintas, aunque en la mayoría de los casos son iguales. No obstante, siempre coinciden en si la forma prima corresponde al conjunto dado o a su inverso. En este sentido, la forma interválica prima también suele coincidir con ellas, como ocurre en este ejemplo, pero no siempre es así.

La mayoría de las formas primas de Forte y de Rahn son de tipo a, pero algunas son de tipo b, las cuales se indican en la Tabla Periódica mediante el superíndice “+”. Sorprendentemente, son justo las complementarias de las marcadas con “*” más la 6-14, por lo que todas ellas ocurren para $c \leq 6$.

Como se puede observar, dada la forma normal de Forte o de Rahn de un conjunto de notas, no es nada obvio obtener, a partir de ella y sin usar la forma interválica, la correspondiente forma normal de su inverso o su complementario. Y tampoco permite determinar fácilmente sus simetrías, ni inversional ni transposicional. Por tanto, lo más práctico y sencillo es usar siempre la forma interválica introducida aquí y, a partir de ella, obtener las formas de Forte y de Rahn que sean necesarias.

6. Conclusiones

En la segunda parte de este trabajo se han realizado dos generalizaciones del vector de clases de intervalos o ICV: el vector de clases de tricordos o TCV y el vector de tipos de tricordos o TTV. El TCV permite distinguir entre dos clases Z-relacionadas, por lo que caracteriza la sonoridad de las clases de conjuntos. Y el TTV permite distinguir entre los dos tipos de una misma clase, por lo que caracteriza la sonoridad de los tipos de conjuntos, salvo el 6-14a y el 6-14b, que son los únicos que tienen un mismo TTV. Además, hemos visto una nueva utilidad de la forma interválica, que es la obtención de las formas normales y primas de Forte y de Rahn.

Como resumen final diremos que en la Tabla Periódica que se ha desarrollado aparecen ordenadas todas las clases de conjuntos y permite ver, de un simple vistazo, sus principales características y las relaciones entre ellas. En particular, proporciona la siguiente información: los nombres de Forte, los tipos de simetría inversional y transposicional, las relaciones Z y las clases complementarias, las formas interválicas primas y la indicación de su tipo (a o b), lo cual permite obtener las formas normales de todos los *tipos* de conjuntos y, a partir de ellas, las correspondientes formas de Forte y de Rahn. Además, dada una forma interválica *prima* es fácil localizarla en la tabla. Los tres vectores ICV, TCV y TTV han sido claves para elaborar esta tabla.

7. Información Adicional

En la publicación [1], además de la Tabla Periódica, se incluye un apéndice matemático donde se obtienen las fórmulas que relacionan los ICV y los TTV de un conjunto y su complementario, mediante las cuales se demuestran las afirmaciones que se han dado aquí sin demostración. Además, se incluye un segundo apéndice que es un listado pormenorizado de las clases y tipos de conjuntos, donde se da, para cada uno de ellos, la forma interválica normal, la forma normal de Rahn (y la de Forte cuando es diferente de ella), el nombre de Forte “extendido” (incluyendo el tipo, a o b, y su Z-relacionado si lo tiene), el ICV y el TTV. La inclusión de este último vector representa una diferencia significativa con respecto a los listados publicados con anterioridad en la bibliografía. Puede encontrarse más información sobre esta y otras materias similares en la página Web www.ruedaarmonica.com o www.harmonicwheel.com.

8. Referencias

[1] Nuño, Luis (2020). A Detailed List and a Periodic Table of Set Classes. *Journal of Mathematics and Music,* DOI: 10.1080/17459737.2020.1775902.

[2] Forte, Allen (1973). *The Structure of Atonal Music*. New Haven: Yale University Press.

[3] Rahn, John (1980). *Basic Atonal Theory*. New York: Schirmer Books.

[4] Straus, Joseph N. (2016). *Introduction to Post-Tonal Theory, 4th Edition*. New York: W. W. Norton.