La Tabla Periódica Musical (1/2)

Luis Nuño

Departamento de Comunicaciones, Universidad Politécnica de Valencia
lnuno@dcom.upv.es, ruedaarmonica@gmail.com, harmonicwheel@gmail.com

Este artículo ha sido publicado en
DIVULGAMAT, Centro virtual de divulgación de las matemáticas
RSME: Real Sociedad Matemática Española
Diciembre 2020
http://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=18500:111-diciembre-2020-la-tabla-periodica-musical-12&catid=67:ma-y-matemcas&directory=67

1. Introducción

Recientemente se ha publicado la Tabla Periódica Musical en la prestigiosa revista internacional Journal of Mathematics and Music [1] y ha recibido una calurosa acogida por parte de varios medios de comunicación. En el presente trabajo se desarrollan las principales ideas contenidas en dicha publicación y, con el objetivo de darle una mayor difusión, se ha hecho de manera que solo sean necesarios por parte del lector unos conocimientos musicales básicos. Para ello se ha simplificado la parte matemática y se han dado más detalles de la parte musical, realizando todas las explicaciones en lenguaje corriente y por medio de ejemplos, pero sin perder por ello rigurosidad.

La denominada "Teoría de Conjuntos" o, modernamente, la "Teoría Post-Tonal", se ha consolidado durante la segunda mitad del s. XX y ha demostrado ser una potente herramienta para el análisis y composición de la música atonal, siendo también aplicable a la música tonal. En esta teoría los conjuntos de notas relacionados entre sí por "transposición" o "inversión" se agrupan en una "clase de conjunto", cada una de las cuales tiene asignado un "nombre de Forte" y una "forma prima" [2, 3]. Así mismo, cada una de ellas contiene un cierto número de las distintas clases de intervalos, y estos números forman el correspondiente "Vector de Clases de Intervalos", el cual caracteriza en gran medida la sonoridad de una clase, aunque no completamente. Los listados de las diferentes clases y sus vectores de clases de intervalos son parte esencial de esta teoría y pueden encontrarse en muchos textos, así como en [1]. Aparte de las referencias mencionadas [2, 3] cabe destacar en esta materia el artículo introductorio [4] y el libro de texto [5].

A diferencia de las referencias anteriores, para analizar los conjuntos de notas usaremos aquí la denominada "forma interválica", y las clases no "inversionalmente simétricas" las desdoblaremos en dos "tipos de conjuntos" relacionados entre sí por inversión, lo que permite distinguir, por ejemplo, entre los acordes mayor y menor, los cuales forman una misma clase. Además, se han desarrollado unas versiones avanzadas del "Vector de Clases de Intervalos", que son el "Vector de Tipos de Tricordos" y el "Vector de Clases de Tricordos". Utilizando estos tres vectores se ha elaborado la mencionada Tabla Periódica, que muestra ordenadamente todas las clases de conjuntos y permite ver sus principales características y las relaciones entre ellas de un vistazo.

Este trabajo consta de dos partes, en la primera de las cuales se ha incluido la explicación de los conceptos fundamentales propios de esta teoría (muchos de los cuales ya se han utilizado en esta introducción), de manera que el trabajo global sea autocontenido.

2. Conjuntos de Notas

Utilizaremos el habitual sistema temperado de afinación de 12 notas, que representaremos mediante los números 0 al 11, donde el 0 corresponde al Do y el 11 al Si. Podemos imaginarnos estas notas en la carátula de un reloj donde el Do está en la posición de las 12, el Do# en la 1 y así sucesivamente hasta el Si, que está en las 11. Dado que a veces escribiremos varios números seguidos, para evitar confusiones representaremos los números 10 y 11 por las letras A y B, respectivamente.

Los conjuntos de notas los escribiremos entre corchetes. Así, por ejemplo, las notas del acorde de Do mayor (Do, Mi, Sol) formarán el conjunto [047], las del acorde de La menor (La, Do, Mi) el conjunto [904] y las de la escala de Do mayor (Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si) el conjunto [024579B]. Nótese que las notas de un conjunto pueden referirse a sonidos que se tocan simultánea o sucesivamente, y además en cualquier orden, por lo que también pueden, en principio, escribirse en cualquier orden. Sin embargo, lo normal será escribir las notas de un conjunto ordenadas en sentido ascendente dentro de una octava (teniendo en cuenta que después de la B viene de nuevo el 0). Por ejemplo, el conjunto [95A24], formado por las notas La, Fa, Sib, Re, Mi, lo escribiremos normalmente como [59A24], [2459A] o análogamente empezando por cualquier otra nota de ese conjunto.

3. Forma Interválica

Diremos que dos conjuntos de notas son del mismo "tipo" si están relacionados por "transposición", es decir, si un conjunto se obtiene a partir del otro transportando todas sus notas un mismo número de semitonos. Esto significa que, por ejemplo, los 12 acordes mayores forman un solo tipo de conjunto, al igual que ocurre con los 12 acordes menores o con las 12 escalas mayores. En el caso del conjunto [59A24], si elevamos todas sus notas 3 semitonos resulta [80157], siendo ambos conjuntos del mismo tipo.

Para representar de una forma sencilla todos los conjuntos de un mismo tipo tomamos uno cualquiera de ellos, ordenamos sus notas en sentido ascendente dentro de una octava y escribimos la secuencia de intervalos, en semitonos, entre cada dos notas consecutivas, incluyendo el intervalo entre la última nota y la primera. Al resultado obtenido, o cualquiera de sus "permutaciones circulares", le llamaremos "forma interválica" y la escribiremos entre llaves. Por ejemplo, todos los acordes mayores, como es el caso de Do mayor, tienen la forma interválica {435}, ya que los intervalos entre dos notas consecutivas (Do, Mi, Sol) son 4, 3 y 5 semitonos (donde el 5 corresponde al intervalo entre Sol y Do). Sus permutaciones circulares son {354} y {543}, que también corresponden al acorde mayor, pero empezando por diferentes notas. Análogamente, todos los acordes menores tienen la forma interválica {345} y todas las escalas mayores {2212221}, o cualquiera de sus permutaciones circulares. Para el conjunto [59A24] (u [80157]), su forma interválica es {41421}. Y, si hubiéramos escrito ese conjunto como [2459A], habríamos obtenido {21414}, que es una permutación circular de la forma interválica anterior y, por tanto, equivalente a ella.

Lógicamente, la suma de todos los elementos de una forma interválica es siempre igual a 12, que es el número de semitonos que hay en una octava.

Cuando comparemos formas interválicas entre sí (o “vectores”, que veremos más adelante), la “mayor” y la “menor” de ellas se determinarán a partir del número formado por sus elementos (es decir, según el “orden lexicográfico”). Así, diremos que la forma interválica {21414} es menor que {41421} (ya que el número 21414 es menor que 41421). A la menor de todas las posibles permutaciones circulares de una forma interválica le llamaremos “forma interválica normal”. En este último ejemplo será {14142}.

4. Conjunto Inverso

Se entiende por “inversión” de un conjunto de notas el resultado de invertir el *sentido* de sus intervalos. Por ejemplo, dado el conjunto [59A24], su inversión es [51086], ya que, en el primer conjunto se pasa de 5 a 9 *subiendo* 4 semitonos, mientras que en el segundo conjunto se pasa de 5 a 1 *bajando* 4 semitonos; y análogamente para el resto de las notas. Nótese que las notas de este último conjunto están ordenadas en sentido *descendente* dentro de una octava. Si las escribimos en sentido *ascendente*, por ejemplo, [56801], podemos obtener su forma interválica, que es {12414}, la cual representa a todos los conjuntos de este tipo. Esta es, además, su forma interválica normal. Como podemos ver, las formas interválicas de un conjunto y su inversión son las mismas pero escribiendo los números en sentido inverso. En el caso del acorde mayor, cuya forma interválica es {435}, su inversión es {534}, que es equivalente a {345} (por permutación circular), es decir, el acorde menor.

Diremos que dos conjuntos de notas son de la misma “clase” si están relacionados por transposición, inversión o una combinación de ambas. Es decir, si sus formas interválicas son las mismas o inversas entre sí (o permutaciones cíclicas equivalentes a ellas). Por tanto, los 12 acordes mayores más los 12 acordes menores forman una sola clase de conjunto.

Dadas las formas interválicas *normales* de un conjunto y su inversión, a la menor de ellas le llamaremos “forma interválica prima” y será la que se utilice para representar a todos los conjuntos de la misma clase. Así, la clase formada por todos los acordes mayores y menores tendrá como forma interválica prima {345}. Y, para el conjunto de notas

[59A24], la forma interválica prima será la menor de {14142} y {12414}, es decir, esta última.

5. Simetrías

En general, una *clase* de conjunto está formada por dos *tipos* de conjuntos relacionados entre sí por inversión. Sin embargo, algunas formas interválicas son iguales a sus inversiones, como ocurre por ejemplo con la escala mayor, {2212221}, por lo que esta clase está formada por un solo tipo y se dice entonces que es "inversionalmente simétrica".

Por su parte, un *tipo* de conjunto está formado, en general, por 12 conjuntos de notas, que son sus 12 posibles transposiciones, pero esto no siempre es así. Por ejemplo, un acorde como Do aumentado (cuyas notas son Do, Mi, Sol#) tiene la forma interválica {444}; y, debido a su estructura "periódica" (el número "4" está escrito 3 veces), solo existen cuatro acordes aumentados diferentes (es decir, 12/3). Este tipo de conjuntos se dice que son "transposicionalmente simétricos" y al número de períodos que hay en su forma interválica se le llama "grado de simetría transposicional", el cual representaremos por la letra "*s*". Así, en los acordes aumentados, $s = 3$. Si un tipo de conjunto no presenta simetría transposicional, diremos que $s = 1$ (toda la forma interválica es un único período), por lo que el número de conjuntos de notas correspondientes a un tipo de conjunto dado es siempre $12/s$. Otro ejemplo es la escala disminuida, formada por 8 notas en sucesión de tono-semitono o semitono-tono. Su forma interválica es {12121212}, que consta de 4 períodos ("12" o "21" escrito 4 veces), es decir, $s = 4$, por lo que solo hay 12/4 = 3 conjuntos de notas de ese tipo.

Lógicamente, el valor de *s* para un conjunto y su inverso es el mismo. Por tanto, una *clase* que sea inversionalmente simétrica tendrá $12/s$ conjuntos de notas y una que no lo sea tendrá $24/s$.

6. Conjunto Complementario

Dado un conjunto de notas, su "complementario" es el conjunto formado por las demás notas. Por ejemplo, el complementario del conjunto [59A24] es [013678B]. Si conocemos la forma interválica de un conjunto dado es fácil obtener mentalmente la del complementario. Para ello nos imaginamos la forma interválica inicial, en este caso {41421}, como en la Figura 1.a), es decir, sobre una línea con 13 marcas, donde la última es equivalente a la primera y los círculos representan las notas de ese conjunto. Puesto que su complementario tiene los círculos en las demás marcas, como se observa en la Figura 1.b), su forma interválica será {1131123}, o cualquiera de sus permutaciones circulares. Como otro ejemplo, la escala mayor tiene la forma interválica {2212221}, por lo que la de su complementario será {23223}, que corresponde a la escala pentatónica (mayor o menor).

Es fácil comprobar que un conjunto y su complementario tienen el mismo tipo de simetría, tanto inversional como transposicional. Por ejemplo, la forma interválica del acorde aumentado es {444}, por lo que la de su complementario es {112112112}, siendo ambas inversionalmente simétricas y transposicionalmente simétricas de grado s = 3. Y la forma interválica de la escala disminuida es {12121212}, por lo que la de su complementario es {3333}, el acorde de séptima disminuida, siendo ambas inversionalmente simétricas y transposicionalmente simétricas de grado s = 4.

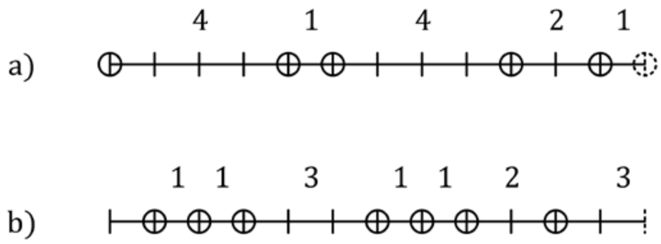

Figura 1. Formas interválicas de un conjunto de notas y su complementario.

7. Vector de Clases de Intervalos: ICV

El número de notas de un conjunto es su “cardinalidad”, que la representaremos por la letra “c” y podrá tomar los valores desde 0 hasta 12. Para c = 2 hay 6 *clases* de conjuntos, llamadas díadas, que son simplemente los intervalos de 1 a 6 semitonos. Sus formas interválicas *primas*, ordenadas de menor a mayor, son: {1B}, {2A}, {39}, {48}, {57} y {66}. Todas ellas son inversionalmente simétricas y tienen s = 1, salvo la clase {66}, el tritono, que tiene s = 2. Los intervalos de más de 6 semitonos se reducen por inversión a una de las clases anteriores.

Para los conjuntos de más de 2 notas podemos determinar cuántos intervalos de cada clase se pueden formar con sus notas. El resultado son 6 números que forman el “Vector de Clases de Intervalos” o ICV (por sus siglas en inglés) y los escribiremos entre paréntesis. Por ejemplo, en un acorde aumentado sus notas forman 3 intervalos de cuatro semitonos, por lo que su ICV es (000300). Y, en un acorde mayor (como Do mayor), sus notas forman un intervalo de tres semitonos (Mi – Sol), uno de cuatro (Do – Mi) y uno de cinco (Sol – Do), por lo que su ICV es (001110). Un acorde menor tiene ese mismo ICV, ya que un conjunto y su inversión siempre tienen el mismo ICV. Así mismo, se puede comprobar que el ICV de la escala mayor es (254361), ya que tiene 2 intervalos de semitono, 5 de tono, 4 de tercera menor, 3 de tercera mayor, 6 de cuarta justa y 1 de tritono.

De este modo, cada *clase* de conjunto tiene un ICV, el cual determina en buena parte su sonoridad, pero no completamente, ya que hay algunas clases que, siendo diferentes, tienen el mismo ICV. En ese caso se dice que esas clases guardan una “relación Z” o que están “Z-relacionadas” y se ha comprobado que el número de clases con el mismo ICV nunca es superior a dos.

Una propiedad importante es que, si tomamos todas las clases de una cierta cardinalidad y las ordenamos según sus ICV, bien por valores crecientes o decrecientes, se puede demostrar que sus complementarios quedan ordenados del mismo modo [1]. De hecho, a cada clase se le asigna un “nombre de Forte” [2], que consta de dos números separados por un guion, el primero de los cuales es su cardinalidad y el segundo un ordinal. Y los ordinales se asignan según su ICV en sentido decreciente. Por ejemplo, la clase formada por los acordes mayores y menores es la 3-11, cuyo ICV es (001110); y la clase siguiente, 3-12, son los acordes aumentados, cuyo ICV es (000300), que es menor que el anterior (el número 000300 es menor que 001110). De esta manera, cada clase y su complementaria tienen el mismo ordinal. Por ejemplo, la escala mayor es la clase 7-35, y su clase complementaria, que es la escala pentatónica, es la 5-35. En el caso de dos clases Z-relacionadas, a una de ellas se le asigna el último ordinal del correspondiente grupo y en ambas se incluye una “Z” delante del ordinal. Por ejemplo, 4-Z15 y 4-Z29.

8. Tabla Periódica Musical

La Tabla 1 es la Tabla Periódica aquí desarrollada, donde cada “período” corresponde a un valor de *c* y se representa mediante ese valor seguido de un guion, como en la parte inicial del nombre de Forte (columna izquierda de la tabla). Para hacer la tabla más compacta, los períodos 0, 1 y 2 se han colocado en la misma fila, al igual que se ha hecho con los períodos 12, 11 y 10.

Dentro de cada período se han colocado las correspondientes clases ordenadas por ICV decreciente (el ICV no aparece en la tabla) y se les ha asignado el mismo ordinal que en su nombre de Forte (número grande en cada celda de la tabla). Así, cada celda tiene asignado un ICV diferente y, en el caso de dos clases Z-relacionadas, ambas están en la misma celda. Este es el caso de las clases 4-Z15 y 4-Z29, cuyo ICV común es (111111). A pesar de que 29 es el último ordinal del período 4, la clase que está en la última celda del mismo es la 4-28, el acorde de séptima disminuida, ya que su ICV, (004002), es el menor de este período. Por otra parte, cada clase y su complementaria, al tener el mismo ordinal, están en la misma columna. Por ejemplo, 5-35 y 7-35, o 3-11 y 9-11.

Las clases que son inversionalmente simétricas tienen el ordinal subrayado y las que son transposicionalmente simétricas llevan en el ordinal un superíndice, que es su grado *s*. Por ejemplo, 3-$\underline{12}^3$ o 6-30^2.

Debajo de cada ordinal está la forma interválica *prima*, escrita sin llaves por simplicidad. Además, cuando en ella aparecen varios “1” seguidos se escriben “en forma de potencia”. Por ejemplo, 1119 se escribe $1^3\,9$ (clase 4-1).

Como puede observarse, cada período comienza con la clase que tiene sus notas lo más juntas posible (es decir, en secuencia cromática) y termina con la clase que tiene sus notas separadas lo más uniformemente posible. Así, el período 4 empieza con la clase {$1^3\,9$} o {1119} (las 4 notas en secuencia cromática) y termina con la clase {3333}, que es el acorde de séptima disminuida (en el que dos notas consecutivas siempre están separadas la misma distancia, 3 semitonos).

Tabla 1. Tabla Periódica de las Clases de Conjuntos.

PERIODIC TABLE OF SET CLASSES

0-	1^{12} –		**1-**	1 0		**2-**	1 1B	2 2A	3 39	4 48	5 57	6^2 66							
3-	1 1^2A	2 129	3 138	4 147	5 156	6 228	7 237	8 246	9 255	10 336	11 345	12^3 444							
4-	1 $1^3 9$	2 $1^2 28$	3 1218	4 $1^2 37$	5 $1^2 46$	6 $1^2 55$	7 1317	8 1416	9^2 1515	10 1272	11 1227	12^+ 1263	13 1236	14^+ 1254	29 1245				
	16 1425	17 1353	18 1335	19 1344	20 1434	21 2226	22 2235	23 2325	24 2244	25^2 2424	26 2343	27 2334	28^4 3333		15 1326				
5-	1 $1^4 8$	2 $1^3 27$	3 $1^2 217$	4 $1^3 36$	5 $1^3 45$	6 $1^2 316$	7 $1^2 415$	8 $1^2 262$	9 $1^2 226$	10 12126	11^+ $1^2 253$	36 $1^2 235$ 12 12216	13 $1^2 244$	14 $1^2 325$	15 $1^2 424$	16 12135	37 $1^2 343$ 17 12144	38 $1^2 334$ 18 12513
	19 12315	20 12414	21 13134	22 13314	23 12252	24 12225	25 12342	26^+ 12243	27 12234	28^+ 12423	29 12324	30 13224	31 12333	32 13233	33 22224	34 22233	35 22323		
6-	1 $1^5 7$	2 $1^4 26$	36 $1^4 35$ 3 $1^3 216$	37 $1^4 44$ 4 $1^2 21^2 6$	5 $1^3 315$	38 $1^3 414$ 6 $1^2 31^2 5$	7^2 $1^2 41^2 4$	8 $1^3 252$	9 $1^3 225$	39^+ $1^3 243$ 10* $1^2 2152$	40 $1^3 234$ 11 $1^2 2125$	41 $1^3 324$ 12 $1^2 2215$	42 $1^3 333$ 13 121215	$14^{=+}$ $1^2 2143$	15 $1^2 2134$	16 $1^2 2413$	43 $1^2 3124$ 17 $1^2 2314$	18^{*+} $1^2 3214$
	44 $1^2 3133$ 19 121314	20^3 131313	21 $1^2 2242$	22 $1^2 2224$	45 $1^2 2332$ 23 121242	46 $1^2 2233$ 24 121224	47 $1^2 2323$ 25 122124	48 $1^2 3223$ 26 122214	27 121233	49 121323 28 122133	29 123213 50 123132	30^2 123123	31 122313	32 122322	33 122232	34 122223	35^6 222222		
7-	1 $1^6 6$	2 $1^5 25$	3 $1^5 34$	4 $1^4 215$	5 $1^3 21^2 5$	6 $1^4 314$	7 $1^3 31^2 4$	8 $1^4 242$	9 $1^4 224$	10 $1^4 233$	11* $1^3 2142$	12 $1^4 323$ 36 $1^3 2124$	13 $1^2 21^2 24$	14 $1^3 2214$	15 $1^2 221^2 4$	16 $1^3 2133$	17 $1^2 21^2 33$ 37 $1^2 21412$	18 $1^3 2313$ 38 $1^2 21214$
	19 $1^3 3123$	20 $1^2 231^2 3$	21 $1^2 21313$	22 $1^2 31213$	23 $1^3 2232$	24 $1^3 2223$	25 $1^2 21232$	26* $1^2 21322$	27 $1^2 21223$	28* $1^2 22132$	29 $1^2 22123$	30 $1^2 22213$	31 1212123	32 1212213	33 $1^2 22222$	34 1212222	35 1221222		
8-	1 $1^7 5$	2 $1^6 24$	3 $1^6 33$	4 $1^5 214$	5 $1^4 21^2 4$	6 $1^3 21^3 4$	7 $1^5 313$	8 $1^4 31^2 3$	9^2 $1^3 31^3 3$	10 $1^5 232$	11 $1^5 223$	12* $1^4 2132$	13 $1^4 2123$	14* $1^3 21^2 32$	15 $1^4 2213$				
	16 $1^3 221^2 3$	17 $1^3 21312$	18 $1^3 21213$	19 $1^2 21^2 213$	20 $1^2 2121^2 3$	21 $1^4 2222$	22 $1^3 21222$	23 $1^3 22122$	24 $1^2 21^2 222$	25^2 $1^2 221^2 22$	26 $1^2 212212$	27 $1^2 212122$	28^4 12121212		29 $1^3 21^2 23$				
9-	1 $1^8 4$	2 $1^7 23$	3 $1^6 213$	4 $1^5 21^2 3$	5 $1^4 21^3 3$	6 $1^6 222$	7 $1^5 2122$	8 $1^4 21^2 22$	9 $1^3 21^3 22$	10 $1^4 21212$	11 $1^3 21^2 212$	12^3 $1^2 21^2 21^2 2$							
12-	1^{12} 1^{12}		**11-**	1 $1^{10} 2$		**10-**	1 $1^9 3$	2 $1^8 22$	3 $1^7 212$	4 $1^6 21^2 2$	5 $1^5 21^3 2$	6^2 $1^4 21^4 2$							

Luis Nuño, 2020
www.harmonicwheel.com
www.ruedaarmonica.com

9. Conclusiones

Los conjuntos de notas relacionados entre sí por transposición forman un *tipo* de conjunto, que representamos por su forma interválica o su forma interválica *normal*. Si a estos conjuntos les añadimos sus inversos obtenemos una *clase* de conjunto, que representamos por su forma interválica *prima*.

La forma interválica que hemos introducido aquí ha resultado ser tremendamente útil y versátil, ya que permite obtener de manera sencilla las formas interválicas de los conjuntos inverso y complementario; y, obviamente, también la del inverso del complementario (que es igual a la del complementario del inverso). Y, además, permite determinar fácilmente sus simetrías, tanto inversional como transposicional.

Como hemos visto, un conjunto y su complementario (y, obviamente, su inverso) tienen siempre el mismo tipo de simetría, tanto inversional como transposicional.

En la Tabla Periódica que se ha desarrollado aparecen todas las clases de conjuntos ordenadas por ICV decreciente y se incluye la siguiente información: nombres de Forte, tipos de simetría inversional y transposicional, relaciones Z y clases complementarias, así como las formas interválicas primas. No obstante, esta tabla contiene aún más información relevante, que se explicará en la segunda parte de este trabajo.

10. Referencias

[1] Nuño, Luis (2020). A Detailed List and a Periodic Table of Set Classes. *Journal of Mathematics and Music,* DOI: 10.1080/17459737.2020.1775902.

[2] Forte, Allen (1973). *The Structure of Atonal Music*. New Haven: Yale University Press.

[3] Rahn, John (1980). *Basic Atonal Theory*. New York: Schirmer Books.

[4] Straus, Joseph N. (1991). A Primer for Atonal Set Theory. *College Music Symposium,* 31, 1-26.

[5] Straus, Joseph N. (2016). *Introduction to Post-Tonal Theory, 4th Edition*. New York: W. W. Norton.